

Quantum Fysica 2

Olaf Scholten
Kernfysisch Versneller Instituut
NL-9747 AA Groningen

Tentamen, Woensdag 28 juni, 2000

5 opgaven, iedere uitwerking op een apart vel papier met naam en studie nummer

Opgave 1

Beschouw een eigentoestand Y_{lm} van L_z en L^2 .

- Druk L_x en L_y uit in L_+ en L_- en toon aan dat $\langle L_x \rangle = 0$ en $\langle L_y \rangle = 0$.
- Toon aan dat in deze toestand $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]\hbar^2$
- Beschouw vanaf nu een deeltje beschreven door

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}} [Y_{1,1} + Y_{1,-1} + Y_{2,2} + Y_{2,1} + Y_{2,0} + Y_{2,-1} + Y_{2,-2}] .$$

Geef de formule voor $\langle L_z \rangle$ en bereken de waarde.

- Is $|\Psi\rangle$ een eigentoestand van L_z ?, leg uit.
- Geef de genormeerde golffunctie als uit de meting blijkt dat $L_z = 1$.
- Geef de formule voor $\langle L_x \rangle$ (n.b. de x-component!) en bereken de waarde voor de golffunctie

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{2,2} + i Y_{2,1}] .$$

Opgave 2

Beschouw 3 deeltjes in een 1 dimensionale Harmonische-oscillator potentiaal. De 3 deeltjes zijn in thermisch evenwicht met een totale energie van $(9/2)\hbar\omega$.

- Beantwoord voor het geval van 3 NIET identieke deeltjes met gelijke massa de volgende vragen.
 - Stel de energie van een willekeurig deeltje wordt gemeten. Wat zijn de mogelijke meetwaarden?
 - Wat zijn de kansen voor de verschillende meetwaarden?
 - Wat is de meest waarschijnlijke energieverdeling tussen de 3 deeltjes?
 - Wat is de gemiddelde energie van een deeltje?
- Beantwoord bovenstaande vragen voor het geval van 3 identieke fermionen. Neem aan dat alle spins in de zelfde richting staan b.v. onderinvloed van een sterk extern magneetveld (negeer spin dus).

Opgave 3

Beschouw een deeltje met spin $\frac{1}{2}\hbar$. Er wordt nu een meting gedaan met de operator $U = S_x + S_y$

- Welke eigenwaarden λ_1 en λ_2 van U kunnen gemeten worden?
- Druk de bijbehorende toestanden u_1 en u_2 uit in de eigentoestanden van S_z , zijnde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, +1/2\rangle$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2\rangle$.
- Is, in principe, een simultane meting van U en S_x mogelijk? Zijn U en S_x onafhankelijke observabelen?
- Na de meting van U wordt S_z bepaald. Geef voor één van de twee eigentoestanden van U de mogelijke waarden voor S_z en de bijbehorende kansen.

Opgave 4

- Geef de tijds-onafhankelijke Schrödinger vergelijking voor het probleem van de oneindige vierkante put,

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{als } x, y, z \text{ allen tussen } 0 \text{ and } a; \\ \infty, & \text{overige gevallen} \end{cases}$$

Specificeer ook de randvoorwaarden.

- Gebruik scheiding van variabelen om dit probleem op te lossen, geef dus de algemene uitdrukking voor de energieën en golffuncties.
- Hoeveelvoudig zijn de grondtoestand en de eerste aangeslagentoestand gegenereerd?
- Geef de algemene storingstheorie formule voor de eerste orde correctie tot de energieën onder invloed van een kleine storing H' in de Hamiltoniaan.
- We voegen nu de volgende storing H' toe aan de Hamiltoniaan,

$$H' = \begin{cases} V_0, & \text{als } a/4 < x < 3a/4 \text{ en } a/4 < y < 3a/4 \\ 0, & \text{overige gevallen} \end{cases}$$

Geeft de eerste orde correctie tot de grondtoestands energie.

Opgave 5

In dit probleem moet een benaderde oplossing van een gestoorde één dimensionele harmonische oscillator,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \alpha x^3 ,$$

worden gevonden door variatie van de parameter b in de golffunctie,

$$\Psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2} ,$$

met $A = c b^{3/2}$.

- Bepaal de normerings constante c .
- Geef de algemene uitdrukking voor de beste benadering tot de grondtoestands-energie volgens het variatie principe.
- Construeer de oplossing voor dit probleem.
- Wat is de reden dat je antwoord niet van α afhangt en dat dit dus een vrij slechte keuze is voor de variatie golffunctie?

=====

Bij de bovenstaande opgaven kunnen de volgende formules voor eigenvectoren in een harmonische-oscillator potentiaal nuttig zijn.

=====

Sigma (spin) matrices.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\sigma_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{3}$$

Harmonic oscillator wave functions.

Solutions for a harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{\omega^2 m}{2} x^2$

$$u_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(y) e^{-y^2/2} \tag{4}$$

with $y = \sqrt{m\omega/\hbar} x$, where the Hermiet polynomials for $n \leq 4$ are given as

$$H_0(y) = 1 \tag{5}$$

$$H_1(y) = 2y \tag{6}$$

$$H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{7}$$

$$H_3(y) = 8y^3 - 12y \tag{8}$$

$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12 \tag{9}$$

Matrix elements:

$$\langle n|x^2|n\rangle = \langle n|p^2|n\rangle / (m\omega)^2 = (2n+1) \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (10)$$

$$\langle n|x^2|n-2\rangle = -\langle n|p^2|n-2\rangle / (m\omega)^2 = \sqrt{n(n-1)} \frac{\hbar}{2m\omega} \quad (11)$$

$$\langle n|x^3|n-1\rangle = 3n^{3/2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \quad (12)$$

$$\langle n|x^3|n-3\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \quad (13)$$

$$\langle n|x^4|n\rangle = [2(n+1)(n+2) + (2n-1)(2n+1)] \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \quad (14)$$

$$\langle n|x^4|n-2\rangle = 2(2n-1)\sqrt{n(n-1)} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \quad (15)$$

$$\langle n|x^4|n-4\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \quad (16)$$

Hydrogen wave functions.

$R_{nl}(r)$ are hydrogen-like wave functions with $a_0 = \frac{\hbar}{\mu c \alpha}$ and $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}, \quad (17)$$

$$R_{20}(r) = 2 \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}, \quad (18)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}. \quad (19)$$

Spherical harmonics $Y_{l,m}$.

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin\theta; Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad (20)$$

with $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}$, and the normalization condition:

$$\int d\Omega Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}. \quad (21)$$

$$L_+ = L_x + iL_y \quad \text{and} \quad L_+ Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1}, \quad (22)$$

$$L_- = L_x - iL_y \quad \text{and} \quad L_- Y_{lm} = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l,m-1}. \quad (23)$$

In addition:

$$|l, j, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} |Y_{l,m}\chi_+\rangle + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} |Y_{l,m+1}\chi_-\rangle \quad \text{for } j = l + 1/2 \quad (24)$$

$$|l, j, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} |Y_{l,m}\chi_+\rangle - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} |Y_{l,m+1}\chi_-\rangle \quad \text{for } j = l - 1/2 \quad (25)$$

with $m = m_j - 1/2$.

Integralen.

Alle benodigde integralen zijn af te leiden uit:

$$\int_{-a}^a e^{i\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha a), \quad (26)$$

$$\int_{-a}^a \cos \alpha x e^{ikx} dx = \left[\frac{\sin(\alpha + k)a}{\alpha + k} + \frac{\sin(\alpha - k)a}{\alpha - k} \right], \quad (27)$$

$$\int_{-a}^a \sin \alpha x e^{ikx} dx = i \left[\frac{\sin(\alpha + k)a}{\alpha + k} - \frac{\sin(\alpha - k)a}{\alpha - k} \right], \quad (28)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi \delta(k - k'), \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p') \delta(p - p') dp' = f(p) \quad (\text{mits } f(p) \text{ differentieerbaar in } p), \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b+ic)^2} dx = \sqrt{\pi/a}, \quad (31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x+b)^2} dx = (b^2 + 1/2a) \sqrt{\pi/a}, \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} e^{ikx} dx = \sqrt{\pi/a} e^{-ikb - k^2/4a}, \quad (33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\pi/a} e^{-b^2/4a}, \quad (34)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2a)^n} \sqrt{\pi/a} \quad \text{voor } n \geq 0, \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{voor } n = 0, \quad (36)$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad \text{met } a > 0, \quad (37)$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{met } a > 0, \quad (38)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(px)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \pi p, \quad (39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{ikx} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|k|}, \quad \text{ook geldig voor } k=0, \quad (40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3}, \quad (41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \frac{\pi}{a^{2n-1}} \quad \text{voor } n \geq 2, \quad (42)$$

$$\int_{-a}^a x^2 \sin^2 n\pi x/a dx = \frac{a^3}{2} \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{(n\pi)^2} \right], \quad (43)$$

$$\int_{-a}^a x^2 \cos^2 \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x/a dx = \frac{a^3}{2} \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{\left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \right)^2} \right], \quad (44)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x). \quad (45)$$

Geef in de oplossingen aan welke formules je hebt gebruikt.